

ALİŞTIRMALAR 12

1. $\sigma : \oplus \longrightarrow$, $\sigma(a, b) = a - b$ nin bir homomorfizm tanımladığını gösteriniz; $\text{çek}(\sigma)$ yı belirleyiniz.
2. $\sigma : * \longrightarrow *$, $\sigma(x) = x^4$ olsun. σ nın bir homomorfizm olduğunu gösteriniz ve $\text{çek}(\sigma)$ yı belirleyiniz.
3. $[x]$, katsayıları tamsayılar olan polinomlardan oluşan toplamsal grup olsun. $\sigma : [x] \longrightarrow$, $\sigma(f) = f(1)$, ile tanımlanan fonksiyonun bir grup homomorfizmi olduğunu gösteriniz, $\text{çek}(\sigma)$ yı belirleyiniz.
4. Her $n > 1$ için \mathcal{S}_n den ${}_2$ ye

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} 1 & , \alpha \text{ tek} \\ 0 & , \alpha \text{ çift} \end{cases}$$

ile tanımlanan σ fonksiyonunun bir homomorfizm olduğunu kanıtlayınız.

5. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin bir grup homomorfizmi olup olmadığını belirleyiniz:

- | | |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| a. $\sigma : \longrightarrow +$, $\sigma(x) = 2^x$ | b. $\sigma : \longrightarrow$, $\sigma(x) = 2^{ x }$ |
| c. $\sigma : \longrightarrow +$, $\sigma(x) = 2 x $ | d. $\sigma : \longrightarrow$, $\sigma(x) = 2x$ |
| e. $\sigma : * \longrightarrow *$, $\sigma(x) = x^2$ | f. $\sigma : {}_5^* \longrightarrow {}_5^*$, $\sigma(x) = x^2$ |

6. G herhangi bir grup ve $\sigma : {}_{13} \longrightarrow G$, bire-bir olmayan bir homomorfizm olduğuna göre, σ yı belirleyiniz.

7. $\sigma : {}_{30} \longrightarrow {}_{30}$ bir grup homomorfizmi, $\text{çek}(\sigma) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ ve $\sigma(13) = 6$ olduğuna göre, $\sigma^{-1}(6)$ yı belirleyiniz.

8. $\sigma : G \longrightarrow G'$ bir örten homomorfizm olsun. Eğer G sonlu ise ve G' nün, mertebesi n olan bir elemanı varsa, G nin de mertebesi n olan bir elemanı bulunduğunu kanıtlayınız.

9. $f : G \longrightarrow G'$ bir grup homomorfizmi; $x \in G$ ise, $f(\langle x \rangle) = \langle f(x) \rangle$

olduğunu gösteriniz.

10. $_{12}$ den $_{30}$ a tanımlı kaç grup homomorfizmi vardır? Bu homomorfizmleri belirleyiniz.

11. $_{30}$ dan $_{12}$ ye kaç tane homomorfizm vardır? Bunlardan kaç tanesi örtendir?

12. $_{30}$ dan $_{10}$ a kaç tane homomorfizm vardır? Bunlardan kaç tanesi örtendir?

13. $k, n \in \mathbf{N}$ için k ve n nin tüm ortak bölenlerinin kümesi \mathbf{B} ve her $d \in \mathbf{B}$ için $\varphi(d) = \frac{k}{d} \cdot \frac{n}{d}$, Euler φ -fonksiyonu, olsun. $_{n}$ den $_{k}$ ya tam $\sum_{d \in \mathbf{B}} \varphi(d)$ tane homomorfizm bulunduğunu kanıtlayınız.

14. $_{8} \oplus _{2}$ den $_{4} \oplus _{4}$ e hiç örten homomorfizm bulunmadığını gösteriniz.

15. $_{16} \oplus _{2}$ den $_{4} \oplus _{4}$ e hiç örten homomorfizm bulunmadığını gösteriniz.

16. $_{4} \oplus _{4}$ ten $_{8}$ e örten homomorfizm var mıdır? $_{16}$ dan $_{2} \oplus _{2}$ ye örten homomorfizm var mıdır?

17. G bir sonlu grup olmak üzere, $\sigma : G \rightarrow _{12}$ bir örten grup homomorfizmi olsun. Eğer $\ker(\sigma)$ nin mertebesi 5 ise, G nin, mertebesi 5, 10, 15, 20, 30, ve 60 olan normal altgrupları bulunduğunu kanıtlayınız.

18. G bir sonlu grup olmak üzere, $\sigma : G \rightarrow _{10}$ bir örten grup homomorfizmi ise, G nin, indeksi 2 ve 5 olan normal altgrupları bulunduğunu kanıtlayınız.

19. G bir sonlu grup; $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ olsun. Bu takdirde, $(K : H \cap K)$ nin $(G : H)$ yi böldüğünü gösteriniz.

20. $_{24}$ ün $H = \langle 3 \rangle$ ve $N = \langle 4 \rangle$ altgruplarını alalım.

a) $H + N$ ve $H \cap N$ nin elemanlarını listeleyiniz.

b) $H/H \cap N$ ve $(H + N)/N$ nin tüm eşkümelerini belirleyiniz.

c) $(H + N)/N$ ile $H/H \cap N$ için Teorem 3 ün kanıtında verilen izomorfizmi, birbirine karşılık gelen elemanları belirterek, kurunuz.

21. $G = {}_{24}$ ün $H = \langle 3 \rangle$ ve $K = \langle 12 \rangle$ altgruplarını alalım.

a) G/H nin tüm eşkümelerini belirleyiniz.

b) G/K , H/K ve $(G/K)/(H/K)$ nın tüm eşkümelerini belirleyiniz.

c) G/H ve $(G/K)/(H/K)$ için Teorem 4 ün kanıtında verilen izomorfizmi, birbirine karşılık gelen elemanları belirterek, kurunuz.