CEVAPLAR

ALIŞTIRMALAR 14

1. a. $\mathbb{Z}_6$ nın sıfır-bölenleri: 2, 3, 4.

b. $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_6$ nın sıfır-bölenleri: $[(\{0\}\oplus\mathbb{Z}_6)\cup(\mathbb{Z}\oplus\{0,2,3,4\})]\setminus\{(0,0)\}$.

c. $\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_6$ nın sıfır-bölenleri: $[(\{0,2\}\oplus\mathbb{Z}_6)\cup(\mathbb{Z}_4\oplus\{0,2,3,4\})]\setminus\{(0,0)\}$.

d. $f,\ g\in\mathcal{S}[0,1]$ için $fg=0 \iff f(x)g(x)=0\ \forall x\in[0,1]$ gözlemi $\mathcal{S}[0,1]$ in sıfır bölenleri hakkında fikir verecektir.

3. $(xy)a=0,\ a\neq 0$ olsun. Eğer $ya=0$ ise, y sıfır-böleni; $ya\neq 0$ ise, $x(ya)=0$ olduğundan x sıfır-böleni.

5. $a\in H,\ a\neq 0,\ K=\{ab : b\in H\}$ olsun. a tersinir değilse, $K\neq H$ olup $b_1\neq b_2$ ve $ab_1=ab_2$ olacak biçimde $b_1,\ b_2\in H$ vardır. Bu durumda, $a(b_1-b_2)=0$ ve dolayısıyla, a sıfır-bölenidir. H sonsuz olunca bu önerme, $\mathbb{Z}$'de olduğu gibi, geçersiz olur.

7. $\mathbb{C}=\{x_1+x_2\mathbf{i} : x_1,\ x_2\in\mathbb{R}\}$.

9. Önceki alıştırmanın koşulu, $\overline{2}=8,\ \overline{4}=4,\ \overline{6}=6,\ \overline{8}=2$ ile sağlanmaktadır.

11. a $x^2=x,\ y^2=y \Longrightarrow (xy)^2=x^2y^2=xy$.

b. $x^2=x \Longrightarrow x^2-x=0 \Longrightarrow x(x-1)=0$.

13. T bir tamlık bölgesi, $H\subseteq T$ olsun. T nin ikili işlemleri H nin de ikili işlemi oluyor ve H bu ikili işlemler ile bir tamlık bölgesi oluyorsa, H ye T nin bir *alttamlık bölgesi* denir. H, T nin alttamlık bölgesi ise, (i) ve (ii) nin sağlanacağı açıktır. Karşıt olarak, (i) ve (ii) koşulları sağlanıyorsa, H, T nin bir toplamsal altgrubu, yani bir Abel grubu olur; 1, H nin birim elemanıdır; T nin çarpma işlemi H nin de çarpma işlemidir. Ayrıca, T nin sahip olduğu birleşme, değişme ve sıfır-bölensiz olma özellkleri H için de geçerlidir.

15. a. (i) $0, 1 \in A$; (ii) $x,\ y \in A \Longrightarrow x = n \cdot 1,\ y = r \cdot 1 \Longrightarrow x - y = (n - r) \cdot 1,\ xy = (nr) \cdot 1 \in A$.

b. D, T nin alttamlık bölgesi ise, her $n \in \mathbb{Z}$ için $n \cdot 1 \in D$.

c. A sonlu ise, $\{k \in \mathbb{N} : k \cdot 1 = 0\} \neq \emptyset$. $k \cdot 1 = 0$ olan en küçük doğal sayı, $|A|$ dır ve aynı zamanda T nin karakteristiğidir.

d. D nin karakteristiği, A sonlu ise sıfır, aksi halde $|A|$ dır.

17. a. $kar(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6) = okek(4, 6) = 12$

b. $kar(\mathbb{Z}_4 \oplus 6\mathbb{Z}) = 0$

c. $kar(\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15}) = okek(6, 15) = 30$.

19. (i) $0, 1 \in P$; (ii) $x,\ y \in P \Longrightarrow x^p = x, y^p = y \Longrightarrow (x - y)^p = x^p - y^p = (x - y),\ (xy^{-1})^p = x^p(y^{-1})^p = xy^{-1} \Longrightarrow x - y,\ xy^{-1} \in P$.

21. $x \in F \setminus \{0, 1\}$ olsun. Bu takdirde, $(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)^2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$. $x^2+x \neq 0$ olduğundan, $(x+1)^3 \neq x^3+1$.